研究ノート：一般均衡解の存在証明に係る分析ツールの概観

櫻田　陽一

Research note: An Overview of Analytical Tools for Proving the Existence of General Equilibrium Solutions

福岡女学院大学紀要

国際キャリア学部編抜刷　Vol. 9, 2023

研究ノート：一般均衡解の存在証明に係る分析ツールの概観

櫻田　陽一

Research note: An Overview of Analytical Tools for Proving the Existence of General Equilibrium Solutions

Abstract

In the Walras-Cassel type general equilibrium system, the coincidence of the number of equations and the number of unknown variables was regarded as the existence condition of the equilibrium solution. On the other hand, Wald, Schlesinger, von Neumann and others have investigated the mathematical conditions ensuring the existence of equilibrium solutions, especially focusing on a non-negative solution. Also, with the advent of Brauwer and Kakutani's fixed point theorem, the discussions for the existence of competitive equilibrium solutions were brilliantly developed by applying topology. With the theme of general equilibrium analysis, this paper traces the historical lineage of theories surrounding the conditions for the existence of competitive equilibrium solutions, focusing mainly on the mathematical content of analytical tools, and attempts to give an overview of them.

Keywords: General equilibrium theory, Leon Walras, Karl Gustav Cassel, Equilibrium solution, fixed point theorem, topology

1．はじめに

ワルラスを鏑矢とする複数の財の需給と価格との相互関係、所謂一般均衡体系[1)]、そしてワルラスの体系を拡張させたカッセルによって連立方程式体系として記述

1) 櫻田（2021）

されたワルラス・カッセル型一般均衡体系に於いては、当該方程式の本数と未知変数の数との一致を以て、均衡解存在の必要十分条件とみなされた。これに対する批判に呼応する形で、ワルト、シュレジンガー、フォン・ノイマンらによる解の存在条件、とりわけ均衡価格の非負解としての存在条件に係る考察に彫琢が加えられ、この分野での議論が数理経済学の分野で隆盛を誇るところとなった。また、ブラウアー、角谷の不動点定理の登場によって、市場均衡のもとでの競争的均衡解の存在条件は、位相幾何学の分野にその舞台を移して華々しく展開されていくこととなった。

本稿では、一般均衡分析をテーマに据え、競争均衡解の存在条件をめぐる学説史的系譜を辿りながら、主として分析ツールの数学的内容に焦点を当て、それらの若干の俯瞰を試みるものである。

２．ワルラスの一般均衡理論

ワルラスは、複数の財の需給と価格との相互関係を連立方程式体系として記述し、当該方程式を解くことで需給量と均衡価格の同時決定を導き出した。その時の解の存在条件として、方程式の数と求める未知数との一致を持って事足れりとするものであった。一般均衡理論の議論を始めるにあたり、ここではワルラスがその著書[2)]で描き出した一般均衡体系の梗概について述べることとする。

部分均衡分析では、抽象化された一つの市場のみを取り出して価格と取引量の関係が分析されていた。そこでは、取り出された市場以外での取引は行われておらず、所謂 *ceteris paribus* の前提が置かれていた。しかし、現実の経済の世界ではある市場での取引が他の市場での価格の動きや、需要と供給にさまざまな形で影響を及ぼすのが通常の姿であり、従ってそのような複数の市場をより包括的に分析するための手法が要請される。このような要請に応える経済分析手法が、ワルラスによって初めて展開された一般均衡分析と呼ばれるものとなる。

一般均衡分析では、n 個の財に関する需要 D_i（$i=1, \cdots, n$）と供給 S_i（$i=1, \cdots, n$）、及び各々の財の価格 p_i（$i=1, \cdots, n$）が登場し、全ての財の各々の需要と供給が一致するときの取引量、価格の決定メカニズムが分析されることとなる。

---

2) Walras（1874）

2．1　一般均衡の定式化[3)]

一般均衡体系では、消費経済に加えて生産経済も対象として含まれる。今、生産物、生産要素の全てを含めて n 種類の財があり、それぞれの財にも n 種類の価格があるとする。

まず生産経済について、企業は利潤を最大化するべく生産活動を行い、財の供給量を決定する。n 種類の財・価格のうち、第 i 番目の財の価格を p_i、第 k 番目の企業の第 j 番目の生産物、あるいは生産要素を y_k^j としよう。y_k^j は、アウトプットとしての生産物であれば符号は正、インプットとしての生産要素であれば符号は負の値をとる。y_k^j は生産ベクトル、$y_k^j = \{y_k^1, y_k^2, \cdots, y_k^n\}$ として表現でき、この生産ベクトルによって張られる生産集合は、変換函数 $f_k(y_k^1, y_k^2, \cdots, y_k^n)$ で表現される。$f_k = 0$ となる生産ベクトル、$y_k^j = \{y_k^1, y_k^2, \cdots, y_k^n\}$ が含まれる生産集合は、生産可能性フロンティアと呼ばれ、最も効率的な生産状態、即ち最小の生産要素投入量のもとで、最大の生産量を達成する状態を示す。このときの企業 k の利潤は、$\sum_{i=1}^n p_i y_k^i$ と表せる。即ち、売上高は正の符号をとる生産物の生産量に生産物価格を乗じた額であり、他方、コストは負の符号をとる生産要素の投入量に生産要素価格を乗じた額になるから、その総和が利潤を示す。また、y_k^i は生産物価格と生産要素価格の函数になるので、結局、$y_k^i = y_k^i(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ と表せる。つまり、y_k^i は生産物であれば生産物の供給函数であり、生産要素であれば生産要素に対する需要函数になるわけで、両者は価格の函数になる。そしてこれらをさらに束ねたものが、変換函数 f_k として表される。

加えて、一般に生産物の供給函数と生産要素の需要函数は、価格に対してゼロ次同次函数である。即ち、価格 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ が一斉に同じ比率の α 倍になったとしても、y_k^i は不変である。他方、利潤函数、$\sum_{i=1}^n p_i y_k^i$ は一次同次になる。即ち、価格 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ が一斉に同じ比率の α 倍になったときには、利潤 $\sum_{i=1}^n p_i y_k^i$ も同じ比率の α 倍になる。ここで、利潤を π として次の二つを比較してみよう。即ち、

$$\pi = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot y_k^i(p_1, p_2, \cdots, p_n) \tag{2.1}$$

$$\pi' = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot p_i) \cdot y_k^i(\alpha p_1, \alpha p_2, \cdots, \alpha p_n) \tag{2.2}$$

---

3)　櫻田（2022）、第4章

式（2.2）の π' は、全ての価格が一斉に α 倍された利潤函数を表す。ところで、y^i_k はゼロ次同次函数であるから、

$$y^i_k(\alpha p_1, \alpha p_2, \cdots, \alpha p_n) = y^i_k(p_1, p_2, \cdots, p_n) \tag{2.3}$$

となる。従って、π' は、

$$\begin{aligned}\pi' &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot p_i) \cdot y^i_k(p_1, p_2, \cdots, p_n) \\ &= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot y^i_k(p_1, p_2, \cdots, p_n) \\ &= \alpha \cdot \pi \end{aligned} \tag{2.4}$$

となって、利潤函数 π の一次同次性が確認された。

続いて、消費者についての考察に移ろう。消費主体である家計は、予算制約の条件下で効用を最大にするように財・サービスを需要し、労働力をはじめとする生産要素を供給する。さて、ここでは単純化された経済を念頭に置くべく、家計も企業も貯蓄はゼロであるとして、企業は利潤の全額を家計に分配し、かつ家計は得られた所得の全額を消費に費やすものとの前提を置いてみる。

ここで、家計 α について第 j 番目の財の初期賦存量を $\overline{x^j_\alpha}$、消費量を x^j_α とすると、

$$\sum_{j=1}^{n} [(p_j \cdot \overline{x^j_\alpha}) + (p_j \cdot y^j_k)] = \sum_{j=1}^{n} (p_j \cdot x^j_\alpha) \tag{2.5}$$

式（2.5）の左辺第一項は家計 α が初期に保有する全ての財の金額であり、第二項は企業から分配される利潤の総額を表す。従って、この二項の合計額が家計 α にとっての予算制約となる。右辺は、消費総額である。今、家計と企業の貯蓄が捨象されているために、両辺は等しく、家計 α は保有する全ての予算を消費に費やす。

さて、家計 α の財 j に対する需要函数 x^j_α は、企業 k の生産物 i の供給函数、または生産要素需要函数の y^i_k と同じく、財 j の価格 p_j に対するゼロ次同次函数となる。即ち、全ての財の価格が一斉に同じ倍率で増加しても、財 j に対する需要量は変わらない。即ち、次の関係を満たす。

$$x^j_\alpha = x^j_\alpha(p_1, p_2, \cdots, p_n) = x^j_\alpha(\alpha p_1, \alpha p_2, \cdots, \alpha p_n) \tag{2.6}$$

さて、式（2.5）では全ての項に財 j の価格 p_j が乗ぜられているが、これを除いて金額から量の関係に直せば、

$$\sum_{j=1}^{n}(\overline{x_\alpha^j}+y_k^j)=\sum_{j=1}^{n}x_\alpha^j \tag{2.7}$$

さらに、財 j に対する市場全体の家計の需要量、企業の需要・供給量を合計すれば、

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\overline{x_\alpha^j}+\sum_{k=1}^{m}y_k^j=\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha^j \tag{2.8}$$

式（2.8）の左辺は、財 j の総供給量であり、右辺は総需要量を表す。ここで、財 j の超過需要、即ち、(財 j の総需要量) − (財 j の総供給量) を E_j とすると、

$$E_j=\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha^j-\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\overline{x_\alpha^j}+\sum_{k=1}^{m}y_k^j\right) \tag{2.9}$$

家計の需要函数 x_α^j、企業の供給函数 y_k^j はともに価格に対するゼロ次同次函数であり、初期賦存量 $\overline{x_\alpha^j}$ は定数だから、超過需要函数 E_j もゼロ次同次函数である。さらに、$y_k^j=y_k^j(p_1,p_2,\cdots,p_n)$、$x_\alpha^j=x_\alpha^j(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ と、家計の需要函数、企業の供給函数は全て価格の函数であるから、超過需要函数 E_j も財の価格の函数となる。

一般均衡という経済状態は、全ての財 j の需要と供給が一致することだから、このことは全ての財についての超過需要がゼロになることを意味する。即ち、n 種類の財と価格について、

$$\begin{aligned}
&E_1(p_1,p_2,\cdots,p_n)=0\\
&E_2(p_1,p_2,\cdots,p_n)=0\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&E_{n-1}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=0\\
&E_n(p_1,p_2,\cdots,p_n)=0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

という、n 本の超過需要に関する連立方程式が同時に成立することを意味する。そして、この連立方程式の解が n 個の均衡価格体系を与えるということである。一般均衡分析では、部分均衡分析とは異なり、市場に供給され需要される全ての財の需要と供給の均衡が同時に達成され、全ての財の需給均衡価格が同時に決定されるという経済事象が分析対象とされるが、解が存在する条件は、ワルラスにあっては連立方程式の本数が未知数である価格の個数に一致していること、即ち、

連立方程式が解の過剰決定もしくは決定不可となる状況が回避されていることに留まっていた。

2.2　ワルラス法則

式（2.10）に示された一般均衡体系は、n 本の超過需要に関する連立方程式であり、求めるべき解は n 個の価格 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ であるから、未知数の数と方程式の数は一致している。問題はないように見えるが、ここで超過需要函数 E_j がゼロ次同次函数であることに着目しよう。例えば、価格が同じ比率の α 倍で一斉に増加する場合を考える。しかし、ゼロ次同次の超過需要函数 E_j のアウトプットは変化しない。即ち、

$$E_i(\alpha p_1, \alpha p_2, \cdots, \alpha p_n) = E_i(p_1, p_2, \cdots, p_n) \tag{2.11}$$

である。さて、倍率 α は任意の定数だから、例えば第1財の価格 p_1 の逆数として、$\alpha = 1/p_1$ としてみる。これを式（2.11）に代入すると、

$$\begin{aligned} E_i(p_1, p_2, \cdots, p_n) &= E_i(\alpha p_1, \alpha p_2, \cdots, \alpha p_n) \\ &= E_i((1/p_1)p_1, (1/p_1)p_2, \cdots, (1/p_1)p_n) \\ &= E_i(1, p_2/p_1, \cdots, p_n/p_1) \end{aligned} \tag{2.12}$$

となってしまい、未知数の数が $n-1$ 個になってしまう。しかし、方程式は依然として n 本であるから、これでは過剰決定となってしまう。もしも $n-1$ 本の方程式を解いて $n-1$ 個の解が求められたとして、残りの n 番目の式は満たされるのかどうか不明である。その保証が得られない限り、全ての市場に関する一般均衡解が必ずしも存在しないということになってしまう。

今、式（2.5）に戻ってみよう。この式は、財 j に関する企業と家計を含めた需給均衡式になっていた。貯蓄がゼロの仮定のもとでは、企業利潤は全て家計に分配され、それに初期賦存量を加えて家計が保有する全予算は、全て消費支出に費やされるから、式（2.5）は必ず成立する。また、式（2.5）の各項に同じ財 j の価格 p_j が乗ぜられているので、これを外に出して整理すると、

$$\sum_{j=1}^{n} p_j[x_\alpha^j - (\overline{x_\alpha^j} + y_k^j)] = 0 \tag{2.13}$$

式（2.13）の［　］内の第二項、$(\overline{x^j_\alpha}+y^j_k)$はひとつの家計$\alpha$についてのみの関係式になっているので、全ての家計について合計することができる。これに式(2.9)の超過需要函数を代入すれば、

$$\sum_{j=1}^{n} p_j\left(\sum_{\alpha=1}^{n} x^j_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{n}\overline{x^j_\alpha}-\sum_{k=1}^{m} y^j_k\right)=\sum_{j=1}^{n} p_jE_j=0 \tag{2.14}$$

式（2.14）は、いかなる価格にも依らずに市場全体の超過需要がゼロになるという関係式を意味している。即ち、$n-1$個の財の超過需要の合計がゼロになれば、残りひとつのn番目の超過需要は自動的にゼロになるということである。即ち、

$$\sum_{j=1}^{n} p_jE_j=\sum_{j=1}^{n-1} p_jE_j+p_nE_n=0 \tag{2.15}$$

となるから、$n-1$個の超過需要の合計がゼロ、即ち、

$$\sum_{j=1}^{n-1} p_jE_j=0 \tag{2.16}$$

であれば、式（2.15）から、残りのn番目の財の需要と供給も必ず均衡しているということ、つまりn番目の財の超過需要がゼロ、即ち、

$$p_nE_n=0 \tag{2.17}$$

が恒等的に得られる。恒等的に得られるという意味は、どのような価格体系であってもそれに依ることなく成立するということである。このように、一般均衡体系に於いては、n番目の式は独立ではなく、残りの$n-1$本の連立方程式によって決定される。従って、未知数もその決定式も$n-1$個となって、過剰決定を免れている。これはワルラスの法則と呼ばれている。

ただし、$n-1$個の未知数はある財の価格で基準化した、$n-1$個の財の相対価格であって、絶対価格ではない点に注意が必要である。式（2.12）に於いて、超過需要函数E_jのゼロ次同次の議論の中で、価格に同じ倍率の$\alpha=1/p_1$を乗じていたが、このときのp_1はたまたま第1財の価格をとっていたわけであるが、p_1には任意の財の価格を適用することができる。つまり、全ての財の価格をj番目の財の価格p_jを基準価格として割り算をして、相対価格に直して基準化を施すことができる。このときの基準価格p_jを価値尺度財、もしくはニュメレール（*numéraire*）と呼ぶ。

一般均衡体系で決定される価格は相対価格であり絶対価格ではないと述べたが、

ここでニュメレールに貨幣を考えてみよう。すると、基準価格としての貨幣の価格を考えることになるが、貨幣の価格、即ち１円玉の価格は１である。つまり、$p_j=1$と置くことができて、相対価格$p_i/p_j=p_i(i \neq j)$となり、結局は絶対価格を決定していることになっていることに、注意が必要である。

３．ワルラス・カッセルの一般均衡体系[4)5)6)]

ワルラスの一般均衡体系を踏まえて、本源的生産要素を所与として最終生産物を生産する体系が、カッセル[7)8)]によって提唱された。この体系では最終生産物を生産する技術的条件が固定的生産係数によって表現され、次のような方程式群から構成された。

$$Ax=r \tag{3.1}$$

式（3.1）は、生産要素の需要量と供給量の量的均衡条件を与える方程式である。Aは固定的生産係数a_{ij}からなる、$m \times n$の非負行列であり、行列の各要素はn種類の第j生産物・財を一単位あたり生産するために必要なm種類の第i生産要素の数量を示す。xは最終生産物のn次元需要ベクトルで、$x=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$である。$r$は本源的生産要素の$m$次元供給ベクトルで、$r=\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$である。このうち、$A$と$r$は、所与とされている。

$${}^tAq=p \tag{3.2}$$

式（3.2）は、生産要素についての需要総額と供給総額の価格ベースでの均衡条件を与える方程式である。${}^tA$はAの転置行列であり、$n \times m$の非負行列である。pは最終生産物のn次元価格ベクトルで、$p=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$である。$q$は本源的生産要素の$m$次元価格ベクトルであり、$q=\{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$である。

---

4) 柴田（1930）
5) 福岡、小山（1959）
6) 武藤（1993）
7) Cassel, “Theoretische Sozialökonomie”, Leipzig, 1918、英語名は、”Theory of Social Economy”
8) Karl Gustav Cassel（1866～1945）、ストックホルムで生まれ、ウプサラ大学で数学の学位を得たスウェーデンの経済学者である。主にドイツで経済学を修め、ストックホルム大学で長く教鞭をとった。

$$x_j = f_j(p_j) \tag{3.3}$$

式（3.3）は、最終生産物である j 財の需要量 x_j を与える需要函数を表し、x_j は最終生産物の j 財の価格 p_j のみの函数として与えられ、j 財以外の財の価格には依存しないとされている。

この体系にあっては、未知数となる最終生産物需要量 x は n 個、最終生産物の価格 p が n 個、本源的生産要素の価格 q が m 個の、合計で $2n+m$ 個の未知数に対して、方程式は式（3.1）が m 本、式（3.2）と式（3.3）のそれぞれが n 本と、合計で $2n+m$ 本であるので、未知数の数と方程式の本数が一致することから、未知数である x, p, q はこの体系に於いて一意的に確定されると考えられた。しかし、ワルラス・カッセル体系には解の一意的存在を巡って多くの批判が寄せられることとなった。

その一つが、生産要素の需給均等条件に係る最終生産物需要量 x の過剰決定問題である。すなわち、式（3.1）に着目すれば未知数である x の個数が n 個であるのに対して、方程式の本数は m 個となっている。この場合 $m>n$ となって、方程式の数が未知数のそれを上回った場合に過剰決定となり、方程式相互間に従属関係がないとすれば式（3.1）の余分な部分は未決定のままに残されることとなる。これでは系全体で見た未知数の数と方程式の数が一致していたとしても、解の存在は保証されない。

もう一つは、ワルラス・カッセル体系が数学的には可解であっても、需要量や価格などの均衡解が負値であったのでは、経済学的に意味をなさないとする批判である。

こうした批判を踏まえてワルラス・カッセル体系には、多くの研究者らによって修正が加えられていく。特に非負の均衡解の存在条件をめぐる一連の議論については、1930年代にツォイテン、ナイサー、フォン・シュタッケルベルグ、シュレジンガーらの一連の業績を踏まえて後に，ワルト[9)10)]によって解決された。以下、その経緯を概観する。

4．シュレジンガー・ワルトの一般均衡体系

4.1　シュレジンガーの体系

式（2.1）で表現された、生産要素の需給均衡条件式が過剰決定に陥ることに対する問題は、ツォイテン、シュレジンガーによって不等式化されることによって解決が試みられた。即ち、全ての生産要素は均衡点に於いて利用し尽くされることはなく、幾分かの余剰が発生することを不等式条件の中で容認した。この時、余剰生産要素は所謂自由財となるのでその価格をゼロとすることで、未知数と方程式の数は一致する。

このような考えに則って、シュレジンガーは式（3.1）に対して次の代替式を提示した。

$$Ax \leq r \tag{4.1}$$

$$^{t}q(r - Ax) = 0 \tag{4.2}$$

式（4.1）では、生産要素に対する需要量 Ax が本源的生産要素供給量で表される生産要素供給量に等しいかまたは下回ることがあることを容認している。式（4.2）は、式（4.1）で生産要素の需給が均衡して $r - Ax = 0$ が成立する場合（その場合、価格 $q_i > 0$）と、需給が均衡せず $r - Ax < 0$ となる場合（その場合、価格 $q_i = 0$）の双方を一本の式で表現したものである。

式（4.2）の $m \times n$ 行列 A と生産要素の m 次元価格ベクトル q、n 次元需要ベクトル x、及び m 次元供給ベクトル r を各要素毎に記述すると、下記のように書き表せる。

---

[9] Abraham Wald, “Über einige Gleichungssysteme in der mathematischen Ökonomie” Zeitschrift für Nationalökonomie, Vol.7, No.5, 1936, pp.637-667 (Abraham Wald, “On Some Systems of Equations of Mathematical Economics”, Econometrica, Vol.19, No.4, 1951, pp.368-403, English translated version by y Otto Eckstein, Princeton University)

[10] Abraham Wald（1902～1950）は、現ルーマニアのトランシルバニアに生まれ、ウィーン大学数学科に進んで博士号を取得。後にワルトは数学者のカール（Karl）・メンガーに師事したウィーンの経済学者シュレジンガーと研究をともにし、ワルラス・カッセル体系の修正に着手している。後年はオーストリアを離れてコウルズ委員会の招きに応じてコロンビア大学で統計学に従事し、計量経済学の分野でワルトの検定などの業績を残している。

$$
{}^{t}q(r-Ax)=(q_1\cdots\cdots q_m)\left(\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\therefore \quad {}^{t}q(r-Ax)=(q_1\cdots\cdots q_m)\begin{pmatrix} r_1-\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\ \vdots \\ r_m-\sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}
$$

式（4.3）が意味することは、m 個の生産要素のうち需給が均衡している j 番目の生産要素については $r_j-a_{ji}x_i=0$ の需給均衡式が満たされる一方で、k 番目の生産要素について超過供給が生ずる場合は $r_k-a_{kl}x_l>0$ となるが、その場合の r_k は自由財と見なされて価格 q_k がゼロとなるということである。即ち、式（4.3）は生産要素の超過供給もしくはその価格のどちらか一方が必ずゼロとなることを保証した条件式であり、所謂、相補条件を表した式であるということができる。

加えてカッセル体系の式（3.2）は全く同じ形のまま生産要素の価格ベースでの需給均衡式として、次のように表されている。

$$
{}^{t}Aq=p \tag{4.4}
$$

式（4.4）についても式（4.1）、（4.2）を踏まえて、その含意を確認しよう。式（4.4）を、行列とベクトルの要素毎に記述すれば次の通りである。

$$
{}^{t}Aq=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{j1}q_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{jn}q_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \tag{4.5}
$$

式（4.5）から自由財となる生産要素 r_k の価格 q_k を含む、最終生産財の価格 p_k を取り出すと、p_k は次のように書ける。

$$
p_k=a_{1k}q_1+a_{2k}q_2+\cdots+a_{kk}q_k+\cdots+a_{mk}q_m \tag{4.6}
$$

式（4.6）では価格 q_k がゼロとなる生産要素 k、即ちこのとき $a_{kk}q_k=0$ を含む形

で、最終生産物の価格 p_k が構成されていることが示されている。

最後に需要函数については、式（3.3）の $x_j = f_j(p_j)$ が次のような逆需要函数の形に書き直されている。

$$p_j = h_j(x_j)$$
$$（但し、h_j = f_j^{-1}） \qquad (4.7)$$

4.2 ワルトによる均衡解の存在証明

（1）シュレジンガーモデルの再構築

ワルトは、シュレジンガーが再構築した修正一般均衡モデルについて、いくつかの前提条件のもとで均衡解を求めた。ここで、シュレジンガー・モデルを再掲する。

・生産要素需給量均衡式（余剰を容認）　$Ax \leq r$　(4.1)
・生産要素需給量均衡の相補条件式　${}^t q(r - Ax) = 0$　(4.2)
・生産要素需給額の均衡式　${}^t Aq = p$　(4.4)
・逆需要函数　$p_j = h_j(x_j)$　(4.7)

これに付随して、ワルトは次の前提条件を付与した。

（前提１）所与の本源的生産要素供給量 r は正のベクトルである（$\forall i; r_i > 0,\ i \in [1, m]$）

（前提２）所与とされる生産係数マトリクス A は非負行列（$A \geq 0$ 即ち $\forall i,\ j;\ a_{ij} \geq 0,\ i \in [1, m],\ j \in [1, n]$）、かつ A の各列に少なくとも一つの正の成分がある（即ち $\forall i,\ \exists j; a_{ij} > 0$）

（前提３）j 財の価格 p_j は j 財の需要量にのみ依存して決定される。かつ、逆需要函数 h_j は $x_j > 0$ の領域で定義される、非負の連続かつ狭義単調減少函数

（前提４）$k = 1, 2, 3, \cdots$ で表記される需要量の点列 $x_j^{(k)}$ について、$x_j^{(k)} > 0$ で $x_j^{(k)} = 0 = x^*$ のような点 x^* に点列 $x_j^{(k)}$ が収束するとき、$h_j(x^*) = \infty$ となる

ワルトが付与した前提条件のうちの前提３については、逆需要函数が狭義単調減少函数であるという点が強過ぎるとして、単調減少函数に条件を緩和すべきこと、また j 財の価格を決定する要素はひとえに j 財の需要のみに依存するのではなく、市場取引に参加する全ての生産財の需要量とすべきことなどの課題点が、

メンガーらによって指摘された。

以下でワルトによる均衡解の存在証明を詳細に追っていくが、まず最終生産財の価格 p_j については、これを式（4.7）の逆需要函数を介して生産財需要量 x_j とともに同時決定されるという条件を外して、外生的に所与のものとした非負ベクトルとすること、また、生産要素価格ベクトル q と最終生産財価格ベクトル p との等式条件式（4.4）を不等式条件式に修正すること、そして前提１で所与とされている本源的生産要素供給量 r を正のベクトルとしているところを非負ベクトルに緩和すること、以上をシュレジンガーの体系に対する修正として盛り込み、条件を満たす最終生産財需要量 $x_i(i=1, \cdots, n)$、及び生産要素価格 $q_j(j=1, \cdots, m)$ についての非負の均衡解が得られることを確認する。

まず、修正されたシュレジンガー・モデルを以下に再掲する[11]。

・生産要素需給量均衡式（余剰を容認）　$Ax \leq r$（但し、$r \geq 0$）　(4.8)

・生産要素需給量均衡の相補条件式　${}^tq(r-Ax)=0$　(4.9)

・生産要素需給額均衡式の不等式化　${}^tAq \geq p$　(4.10)

・生産要素需給額均衡の相補条件式　${}^tx({}^tAq-p)=0$　(4.11)

・最終生産財価格（所与）　p_j: $given$（但し、$p_j \geq 0$）　(4.12)

（前提１）所与の本源的生産要素供給量 r は非負ベクトルである（$\forall i; r_i \geq 0,\ i \in [1, m]$）

（前提２）所与とされる生産係数マトリクス A は非負行列（$A \geq 0$ 即ち $\forall i, j;\ a_{ij} \geq 0,\ i \in [1, m],\ j \in [1, n]$）、かつ A の各列に少なくとも一つの正の成分がある（即ち $\forall i, \exists j; a_{ij} > 0$）

（前提３）最終生産財価格 p_j は所与の非負ベクトルである（$\forall j; p_j \geq 0,\ j \in [1, n]$）

（2）非負解の存在証明

以上の修正されたシュレジンガーモデルを構成する、式（4.8）～（4.11）からなる方程式群の解である $x_i(i=1, \cdots, n)$、及び $q_j(j=1, \cdots, m)$ が非負であることを証明するために、ここでは数学的帰納法を適用する。即ち、最終生産物需要 x_i について、まず $i=1$ の場合について検証し、しかるのちに $i=n-1$ の場合について非負解の存在を前提したときに、$i=n$ の場合に非負解の存在を検証し、

---

11) 武藤（1993）

全体の証明とするアプローチである。

（i）$i=1$ の場合

まず、式（4.8）は次のように記述される。

$$a_{j1}\cdot x_1 \leq r_j \ (j\in[1,m]) \tag{4.13}$$

前提2より、式（4.13）の a_{j1}の中に $a_{k1}\neq 0$ となる $k\in[1,m]$が存在する。それを用いて不等式（4.13）の両辺を a_{k1}で除すれば、

$$x_1 \leq \frac{r_k}{a_{k1}} \ (k\in[1,m]) \tag{4.14}$$

が得られる。$a_{k1}\neq 0$ となる $\forall k\in[1,m]$について不等式（4.14）の右辺の値の最小値をとり、それを $\bar{a}$ と置く。即ち、

$$\bar{a}=min\left(\frac{r_k}{a_{k1}}\right) \ (k\in[1,m]) \tag{4.15}$$

式（4.14）、（4.15）より、

$$x_1 \leq \bar{a} \tag{4.16}$$

とできる。即ち、式（4.13）によって与えられる所与の本源的生産要素供給量 r_j を制約条件とすることで、生産要素需要量 $a_{j1}\cdot x_1$の最大値、即ち最終生産物需要量 x_1の最大値を与える $\bar{a}$ が式（4.13）に対する解であると解釈できる。このとき、$\bar{a}=0$、即ち需要量 x_1がゼロのとき、第1財は自由財となってその価格 p_1はゼロになる。また、式（4.9）が表す生産要素市場において第1財を生産する生産要素の需要量もゼロとなるから、従って第1財の生産に供されるべき生産要素は自由財となり、その価格ベクトル q もゼロとなる。p_1と q がゼロになるから、式（4.9）～（4.11）が明らかに成立する。これは自明の結果であるので、ここでは $\bar{a}>0$ について検討を進めることとする。

ここで、$x_1=\bar{a}>0$ は、不等式群（4.13）の中で需給が均等している等式群の解となるので、これを次のように置く。

$$a_{j1}\cdot\bar{a}=r_j \ (j=1\sim k) \tag{4.17}$$

式（4.17）に対応する形で、式（4.9）の相補条件式に於ける生産要素価格べ

クトル q のうち、$j=1\sim k$ で正の値を持つ。q をベクトル表示で示せば、

$$q=\{q_1, q_2, \cdots, q_m\}=\{q_1, q_2, \cdots, q_k, 0, 0, \cdots, 0\} \tag{4.18}$$

また、$q_j>0$（$j=1\sim k$）に対応して、不等式群（4.10）の $j=1\sim k$ では等号が成立しており、次のように示すことができる。

$$a_{j1}\cdot q_j=p_j \quad (j=1\sim k) \tag{4.19}$$

式（4.19）の $q_j, p_j>0$（$j=1\sim k$）を含む $q_j, p_j\geq 0$（$j=1\sim m$）に対して、$j=1\sim m$ で不等式群（4.11）が成立する。以上、式（4.8）～（4.11）からなるシュレジンガーの一般均衡モデルにおいて、第一財（$i=1$）の場合について方程式群の解である x_i（$i=1$）、及び q_j（$j=1, \cdots, m$）が非負解として得られることが確認された。

（ii）$i=n-1$ の場合

続いて、$i=n-1>1$ の場合に、式（4.8）～（4.11）を満たす非負解 x_i（$i=1, \cdots, n-1$），q_j（$j=1, \cdots, m$）が存在すると仮定する。まず、式（4.8）は次のように記述される。

$$a_{ji}\cdot x_i\leq r_j \quad (i\in[1, n-1],\ j\in[1, m]) \tag{4.20}$$

ここで前提2より、式（4.20）の a_{ji} の中に $a_{jk}\neq 0$ となる $k\in[1, m]$ が存在する。そのときの k を $k=n$ と置く。不等式群（4.8）の中で需給が均衡して等式となる $r_j-a_{jn}\cdot x_i=0 \quad j\in[1, m]$ について、次の変数 $\bar{x}$ を考える。

$$\bar{x}=min\left(\frac{r_j}{a_{jn}}\right) \quad (j\in[1, m]) \tag{4.21}$$

このことは、次の不等式条件が成立することを意味する。

$$\frac{r_j}{a_{jn}}\geq \bar{x} \quad (\forall j\in[1, m])$$

$$\therefore \quad r_j-a_{jn}\cdot\bar{x}\geq 0 \quad (\forall j\in[1, m]) \tag{4.22}$$

ここで、不等式（4.22）の左辺を改めて r_j' と定義する。即ち、

$$r_j' = r_j - a_{jn}\cdot x \geq 0 \quad (j \in [1, m])$$

$$(\text{但し、} x \in [0, \bar{x}]) \tag{4.23}$$

$i = n-1$ の場合の修正されたシュレジンガーモデル体系の、式（4.8）～（4.11）は次のように表される。

・式（4.8）の生産要素需給量均衡式：

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{ji}\cdot x_i + a_{jn}\cdot x \leq r_j \quad (j = 1, \cdots, m)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n-1} a_{ji}\cdot x_i \leq r_j - a_{jn}\cdot x = r_j' \quad (j = 1, \cdots, m)$$

$$(\text{但し、} x \in [0, \bar{x}]) \tag{4.24}$$

・式（4.9）の生産要素需給量均衡の相補条件式：

$$\sum_{j=1}^{m} q_j \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ji} \cdot x_j - r_j' \right) = 0 \tag{4.25}$$

・式（4.10）の生産要素需給額均衡式の不等式：

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\cdot q_j \geq p_i \quad (i = 1, \cdots, n-1) \tag{4.26}$$

・式（4.11）の生産要素需給額均衡の相補条件式

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \cdot q_j - p_i \right) = 0 \tag{4.27}$$

ここでは、上の式（4.24）～（4.27）を満たす非負の解 $x_i (i = 1, \cdots, n-1)$、及び $q_j (j = 1, \cdots, m)$ が存在すると仮定して、これが $i = n$ の場合でも非負解が存在することを、次の検討で確かめる。

（iii）$i = n$ の場合

$i = n-1$ の場合に仮定した非負の解集合 $q = \{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$ について、式（4.26）に与えられた関係式で $i = n$ の場合を満たすものが得られると考える。即ち、

$$\sum_{j=1}^{m} a_{jn}\cdot q_j \geq p_n \tag{4.26$'$}$$

式（4.26)′で等号が成立する場合は、生産要素の需給額が均衡する場合であり、

$$\sum_{j=1}^{m} a_{jn}\cdot q_j = p_n \tag{4.26$''$}$$

が成立する。この場合は正の符号を持つ $x_i \in (0, \bar{x}]$ が生産要素需給額均衡の相補条件式（4.27）に於ける $i=n$ の非負解となる。一方、式（4.24）は $x_n \in (0, \bar{x}]$ のもとで成立する。式（4.25）については、$r_j' = r_j - a_{jn}\cdot x$（但し、$x \in [0, \bar{x}]$）の関係を用いて、

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} q_j \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ji}\cdot x_j + a_{jn}\cdot x - r_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} q_j \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ji}\cdot x_j - r_j' \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.25$'$}$$

となって、成立することが確認される。

他方、式（4.26)′で等号が成立しない場合は、生産要素の供給額が需要額を上回る場合を意味しており、

$$\sum_{j=1}^{m} a_{jn}\cdot q_j > p_n \tag{4.26$'''$}$$

である。この場合は、生産要素需給額均衡の相補条件式（4.27）が成立すべく、自由財となる第 n 財の需要 x_n と価格 q_n がゼロとなって、式（4.24)、(4.25)、（4.26）が成立する。

以上から、$i=n$ の場合に於いても条件式の成立が確認されたことから、修正されたシュレジンガー体系のもとで非負解 $x_i(i=1, \cdots, n)$, $q_j(j=1, \cdots, m)$ の存在が確認された。

以上、一般均衡体系に係るやや古典的議論について概観した。即ち、一般均衡体系を始めて世に出したワルラス（1874)、このワルラスの一般均衡体系を明快な形で再提示したカッセル（1918)、一般均衡解の非負条件を数学的に厳密に吟味したワルト（1936）である。

一般均衡解の存在証明に係る議論は、この後、アロー、ドブリュー（1954)、マッケンジー（1954)、ゲール・二階堂（1955)、ゾネンシャイン（1975)、マス

コレル（1975）らによって、より一般的な一般均衡体系が構築されていく[12]。その過程で均衡解の存在証明に強力に威力を発揮したのが不動点定理である[13]。不動点定理には複数のバリエーションが存在するが、その中で我が国の数学者である角谷静夫の不動点定理（1941）は、ジョン・ナッシュのナッシュ均衡の存在証明（1950）に用いられたほか、マッケンジー（1954）によっても競争的均衡解の存在証明に適用された。

角谷の不動点定理は、上半連続対応（一対多価写像）で表現される、より一般性の高い定理であるが、位相幾何学の分野での最も基本的な不動点定理に、ブラウアー（1910）のものがある。以下、一般均衡解の存在証明に威力を発揮してきた数学ツールである、不動点定理に焦点を移し、その梗概を概観する。

5．不動点定理

一般均衡分析に於ける競争均衡の存在証明で威力を発揮した分析ツールとしての不動点定理には、前述の通りに複数のバリエーションが存在する。本稿ではそのうちブラウアーの不動点定理に焦点を当てる。議論に先立って、まず当該不動点定理の初等的証明に於いて頻繁に参照されるスペルナーの補題について概観する。

5．1　スペルナーの補題[14)15)16)]

スペルナーの補題は、位相幾何学の分野で議論の展開が目覚ましい補題である。補題の概説に際してはその全容の考察にあたって、一次元の線分上の補題から議論を始め、次いで二次元の平面、そして一般論としての n 次元の補題へと進めていく。

[12] 久保田（2007）
[13] 福岡（1980）
[14] 二階堂（1978）
[15] 川崎（2019）
[16] 浦井、村上（2014）

（１）一次元の補題

線分を考え、左端に番号１を付番し、右端には番号２を付番する。この線分を任意の複数の小線分に細分し、各々の細分化された小線分の両端に１か２の番号を任意に付番する。

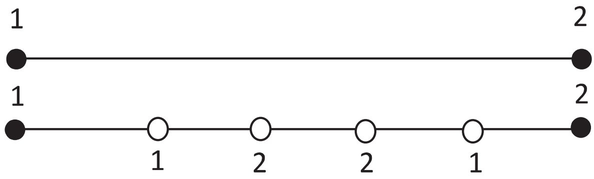

図-１　一次元線分の分割

このとき、細分化された線分のうちで両端に番号１と２をそれぞれ持っている線分は奇数個であることを示す。

ここで、番号１を左右両端のどちらか一方に一つだけ持つ線分の本数を a とし、番号１を左右両側に二つ持つ線分の本数を b とする。線分をそれぞれ取り出して両端の点に着目し、番号１が付番された点の数を数え、その総数を M とする。左右両端のどちらか一方に一つだけ番号１を持つ線分について集計した、番号１が付番された点の数は a に等しい。他方、番号１を左右両側に二つ持つ線分について集計した、番号１が付番された点の数は２b に等しい。従って、重複を許して番号１が付番された点ののべ数 M は、次の通りである。

$$M=a+2b \tag{5.1}$$

図-１の線分では、左端に番号１が付番され、それ以外は二本の線分に重複する形で付番されている。従って、M、N の各々の関係は次の通りである。

$$M=a+2b=1+2\,(N-1)$$

$$\therefore \quad a=2(N-b)-1 \tag{5.2}$$

以上より、両端に番号１と２を一つずつ持つ線分の本数 a は奇数本であることが示された。ところで、奇数本存在するということの含意は、少なくとも一本は存在するということを示していることに注意が必要である。

（2）二次元の補題

次に次元をひとつ増やし、二次元平面上に於けるスペルナーの補題について考察する。今、三角形を考え、3つの頂点に1、2、3を付番する。当該三角形について、3つの頂点と3辺の中点を結んで線分を作り、これらの線分によって三角形を6つに分割する（図-2の実線）。さらに分割された小三角形の3つの頂点と3辺の中点を結んで同じように小線分を作り、これらの線分によって三角形をさらに36個に分割する（図-2の破線）。次いで、この36個の小三角形の頂点にも付番していくが、付番の規則として、

- 大三角形の辺に接している小三角形の辺の点は、大三角形の両端の点の番号のいずれかと同じ番号を付番する
- 大三角形の内部に小三角形が入っている場合、即ち大三角形の辺とはいずれの辺も接しない小三角形の頂点の番号は、1、2、3のうちのいずれかを付番する（図-2ではやや極端な例を例示するために内部の小三角の頂点には全て1を付番している）

このうち3つの頂点に1、2、3と付番された小三角形が、大三角形の中に奇数個存在することを示す[17]。（図-2のグレーの小三角形）

まず図-2の三角形について、両端の頂点に番号1、2が付番された小線分を

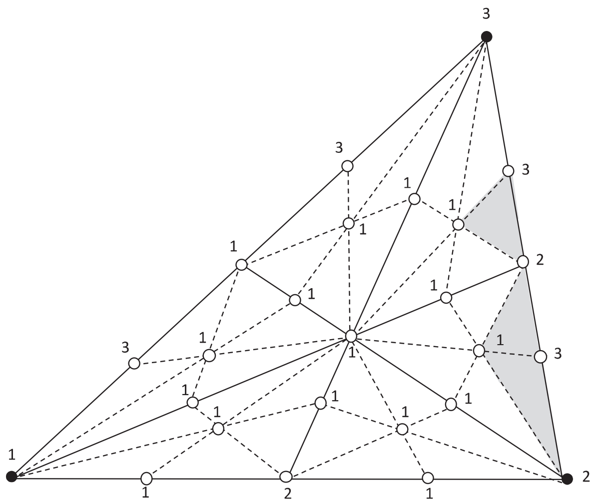

図-2　二次元平面の分割

ηと命名すれば、ηを辺に持つ小三角形は大三角形の底辺に於いてのみ、その一部を共有する。また、大三角形の底辺に一次元の補題を適用すれば、大三角形の底辺の一部を共有するηは奇数個になる。また、ηを辺に持つ小三角形について頂点の番号が１、２の辺を一つだけ持つもの（図-３(1)）と二つ持つもの（図-３(2)）が存在するが、三つ持つものは存在しない。また、図-３(1)から明らかなように、頂点の番号が１、２の辺を一つだけ持つ小三角形の残りの頂点の番号には３が付けられる。

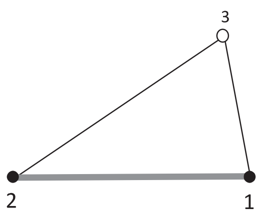

図-３(1)　ηを一つだけ持つ小三角形

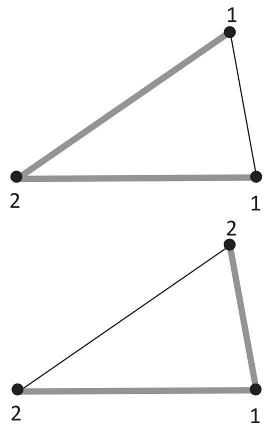

図-３(2)　ηを二つ持つ小三角形

また、両端に番号１、２が付番されている辺は、大三角形の底辺の一部を共有する小三角形については一つの小三角形について一辺が、大三角形の内部にある小三角形では二つの小三角形が一辺を共有する。それは、内部の小三角形は同じ一辺の底辺を二つの小三角形で共有するからである。

さて、両端の頂点に番号１、２が付番された線分ηと、ηを辺に持つ小三角形に着目する。次の図-４には、ηを太線で表示したものを示す。

繰り返しになるが、大三角形の底辺に一次元の補題を適用すれば、このときのηは図-４では３本の奇数本になっている。大三角形の辺上（底辺のみになる）と内部のηの総数をNとし、ηを一つだけ持つ小三角形の個数をa、二つ持つ小

[17] Tanaka（2012）

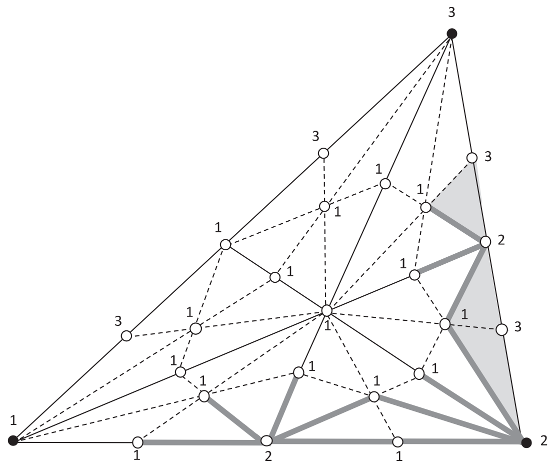

図- 4　大三角形・小三角形と η

三角形の個数を b とする。このとき、小三角形が持つ η の、重複を許す総数を W とすれば、次の関係式が導かれる。

$$W = a + 2b \tag{5.3}$$

大三角形の底辺に含まれる η は、スペルナーの一次元の補題より奇数個存在するから、その数を c とする。すると、η の総数を N から c を除いた η は大三角形の内部に含まれる η であるから、この η は二つの小三角形に共有されている。即ち、

$$W = a + 2b = c + 2(N - c)$$

$$\therefore a = 2(N - b) - c \tag{5.4}$$

c は奇数であるから、a、即ち η を一つだけ持つ小三角形の個数、即ち、頂点の番号が１、２、３である小三角形は奇数個であることが示され、二次元の補題が示された。

なお、これは次の考え方によっても証明することができる。大三角形の底辺に含まれる η についてのみ、これを横断して大三角形の内部に進むことができるとする。大三角形の内部に入って以降は、同じように別の η に遭遇した際にはこれを横断してさらに先へと進めるものとするが、一度通った道は二度通ることはで

きない。従って、引き返すことはできない。すると、三つの頂点に１、２、３と付番されている小三角形（図-３(1)）に到達した段階で、当該小三角形から外に出ることができなくなる。即ち、行き止まりとなって移動は終了となる。これは、図-５の③と付番されたηを横断して、大三角形の内部を進んでいって網掛けされた小三角形で行き止まりとなった経路Aに該当する。また、大三角形の底辺に含まれる一つのηを横断したのち、再び大三角形の外に出る場合も、移動は終了となる。これは、図-５の①と付番されたηを横断して、大三角形の内部を進んでいって②のηから大三角形の外に出る経路Bに該当する。これは、②から入って①から出ても同じである。

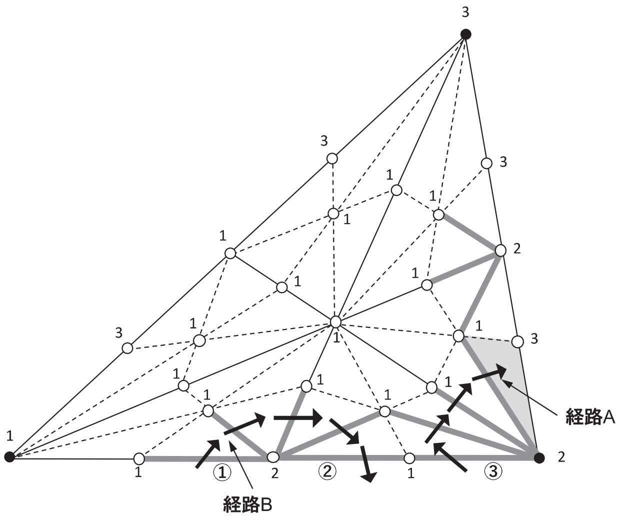

図-５　小三角形群とηの横断パターン

このとき、経路Bの移動パターンで大三角形の底辺上のηを横切る回数は、「入り」と「出」とで必ず２の倍数、即ち偶数となる。経路Aは、「入り」はあるが「出」がないので、大三角形の底辺上のηを横切る回数は奇数回になる。即ち大三角形の底辺上のηは、一次元の補題により奇数個であるから、偶数回＋奇数回がηが奇数個であることと整合する。

ここまでの議論で、三つの頂点に１、２、３と付番されている小三角形が、経路Aの行き止まりの三角形で尽くされるのであれば、当該諸三角形の個数が奇

数個であることが示されるので、二次元の補題が示されたことになる。しかし、大三角形の底辺上のηから大三角形内部に入る経路では到達できない小三角形の中に、三つの頂点に１、２、３と付番されている小三角形が存在するかも知れない。その個数が奇数個あれば、合計で偶数個になってしまい、二次元の補題が示せない。実際、図-６に示すようなものが存在する。この二つの網掛けの小三角形は、大三角形の底辺に含まれるηからは到達できない三角形である。さて、今、このような三角形の内部を出発点として、ηを横断して進んで経路Cなる道を進む。大三角形の外側には出られないので、経路C上の移動が終了する行き止まりは、外側からは到達できないもう一つの小三角形以外にない。このことは、大三角形の底辺上のηから大三角形内部に入る経路では到達できない小三角形の個数が偶数個であることを意味する。従って、三つの頂点に１、２、３と付番されている小三角形の総数は奇数個であるという、二次元の補題が示された。

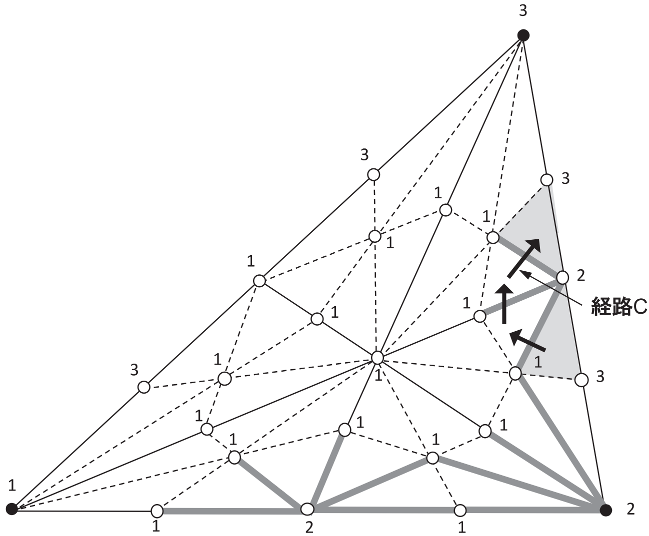

図-６　小三角形群とηの横断パターン（その２）

（３）n次元の補題

最後に一般的補題として、$n>2$を含むn次元平面上に於けるスペルナーの補題について考察する。一次元の補題では小線分、二次元の補題では小三角形と称

したが、一般論としての n 次元の補題では n 次元小単体という呼称を用い、これを k と表記する。n 次元小単体は n 次元単体を細分化したものであり、この n 次元単体を K と表記する。まず、K が有する $n+1$ 個の頂点（一次元の線分では二つの頂点、二次元の三角形では三つの頂点が存在した）に、0 から n までの番号を順不同に付番する。k の頂点のうちのひとつが K の $n-1$ 次元面に含まれる場合（これは、一次元の場合は小線分の頂点が線分の頂点に含まれる場合、二次元の場合は小三角形の底辺が大三角形の底辺に含まれる場合に相当する）その面と同じ番号を付番する。K の内部に含まれる k の頂点には、$0, 1, 2, \cdots, n$ のいずれかを付番する。このとき、頂点の番号が $0, 1, 2, \cdots, n$ の全てが付番された k が奇数個存在することが示される。これは、数学的帰納法によって示すことができる。まず、$n=1$ の場合であるが、これはすでに示されている一次元の補題である。$n>1$ の場合で、$n-1$ の場合に n 次元の補題が成立すると仮定する。即ち、頂点の番号が $0, 1, 2, \cdots, n-1$ の全てが付番された k が奇数個存在するものと仮定する。このことは、K の $n-1$ 次元面に含まれる $n-1$ 次元単体の内、頂点に 0 から $n-1$ が付番されたものは奇数個であることを意味する。この流れは、二次元の補題と同じである。K の外側から奇数個の頂点に 0 から $n-1$ が付番された -1 次元単体を横断して K の内部を移動していき、$0, 1, 2, \cdots, n$ の全てが付番された k に行きついて移動が終了となるが、このような経路は奇数個であることから、頂点の番号が $0, 1, 2, \cdots, n$ の全てが付番された k が奇数個存在することが示される。また、K の外側から到達できない k については、二次元の補題と同様の考え方からその個数が偶数個であることが示される。従って、n の場合にも n 次元の補題が成立することが示された。

スペルナーの n 次元の補題の記述に際しては、ホモロジー、トポロジーなどの位相幾何学、代数的位相幾何学や抽象代数学の知見の動員が必要となるが、その中でも初等的知見である n 単体（*n-Simplex*）のターミノロジーを用いて表記してみよう。

単体とは、頂点の位置が決定づけられれば、それのみによって一意的に決定される空間である。単体はさらに複数の単体から成る集合体としての単体的複体や鎖複体などの概念を与える。今、$n+1$ 個の点からなる点集合 $P=\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ をとり、それらが $\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 次元以下の部分空間に含まれることはない、即ち、これらが一般の位置にある、あるいは、点集合の各要素がアフィン独立であると

き、これら $n+1$ 個の点によって張られる凸包を n 単体と呼び、記号に Δ を用いて次のように表記する。

$$\Delta = | p_0, p_1, \cdots, p_n |$$

$$= \{x = \sum_{i=0,n} \lambda_i p_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}^n, \lambda_{i, \forall i \in N} \geq 0\} \quad (5.5)$$

スペルナーの１次元の補題、２次元の補題の議論では、線分や三角形の頂点などに対して付番を施したが、これを一般的な表現で言い直せば、n 単体 $| p_0, p_1, \cdots, p_n |$ の単体分割集合を Q とするときに、Q の各点に$0, 1, \cdots, n$ のいずれかの番号を付番することをラベリングと呼ぶ。特に、$q \in Q$ を含む最小の単体を $| p_{i0}, p_{i1}, \cdots, p_{ik} |$ とするとき、$I(q) = \{i_0, i_1, \cdots, i_k\}$ のいずれかの番号を付番することを、適切なラベリングと呼ぶ。また、$n+1$ 個の頂点に$0, 1, \cdots, n$ のすべての番号が重複なくちょうどひとつずつ付番されている n 小単体を完全ラベル小単体と呼ぶのであった。

これらのターミノロジーを用いて、スペルナーの n 次元補題を記せば、次のように書ける。

定理：スペルナーの補題
n 単体の任意の単体分割の頂点集合に適切なラベリングが与えられたとき、完全ラベル小単体の個数は奇数である

この補題が、次に述べるブラウアーの不動点定理そのものであることを見ることができる。なお、スペルナーの補題はブラウアーの不動点定理証明の初等ツールとして参照されることが非常に多く、関連文献も膨大に存在することから、本稿では詳細な考察は割愛する。

5.2　ブラウアーの不動点定理

ブラウアーの不動点定理は、位相幾何学のターミノロジーを用いて次のように記される。

定理：ブラウアーの不動点定理
f が n 単体 Δ からそれ自身の n 単体 Δ への連続写像、$f: \Delta \to \Delta$ であるならば、$f(p) = p$ となる不動点 $p \in \Delta$ が存在する。

別の表現で表記するならば、

n 単体 Δ の任意の単体分割に対し、どの完全ラベル小単体もその頂点の一つは不

動点である。

ブラウアーの不動点定理はその成立に際して複数の条件を前提としており、それらは、1）函数 f は n 単体 Δ 上で連続であること、2）Δ は有界閉集合であること、即ち、コンパクトであること、3）Δ は凸集合であること、これは定義より Δ が最小の凸包であることからクリアされているが、これらの諸条件のもとで成立する[18]。

ブラウアーの不動点定理と競争均衡解の存在条件との親和性について以下に概説すると、今、最も単純な一財市場を考え、財 x の需要函数と供給函数の各々を、

$$x=d(p),\ \ x=s(p) \tag{5.6}$$

と置く。財 x の需給は、価格 p の函数である。このとき、価格が均衡価格 p^* を上回り、例えば p^H の水準に達すれば需要は供給を下回って、所謂超過供給が発生する。逆に、価格が均衡価格 p^* を下回り、例えば p^L の水準に達すれば需要は供給を上回って、所謂超過需要が発生する。今、超過需要を e と表記すれば、これは価格の函数であり、超過需要の発生時には $e>0$ であり、超過供給発生時には $e<0$ である。今、価格を $p \in P=[p^L, p^H]$ とすれば、P は有界閉集合と見なすことができる。このような P から P への写像 $f(p)$ を、次のように考える。

$$f(p)=p+k\cdot e(p) \qquad p\in P,\ \exists k\in\mathbb{R} \tag{5.7}$$

写像 $f(p)$ は明らかに連続函数であるから、ブラウアーの不動点定理が適用できて、競争的市場均衡としてそのときの価格 p^* の存在を主張することができる。また、価格が p^* のもとで需給が均衡するということは、超過需要 $e(p^*)=0$ を意味することともなり、式（5.7）に於いて、

$$\begin{aligned} f(p^*) &= p^*+k\cdot e(p^*) \\ &= p^*+k\cdot 0 \\ &= p^* \end{aligned} \tag{5.8}$$

を意味する。

---

[18] 酒井（2014）

６．結び

本稿では一般均衡解の存在条件をめぐる学説史的系譜を辿りながら、主として分析ツールの数学的内容に焦点を当て、それらについての若干の俯瞰を試みた。即ち、ワルラスを鏑矢とする複数の財の需給と価格との相互関係、所謂、一般均衡体系、そしてワルラスの体系を踏まえてさらに明快な姿が提示されたワルラス・カッセル型一般均衡体系、その後のワルト、シュレジンガーらによる解の存在条件、とりわけ均衡価格の非負解としての存在条件に係る考察、また、ブラウアー、角谷の登場によって、市場均衡のもとでの競争的均衡解の存在条件について、位相幾何学の分野にその舞台を移して華々しく展開されていくこととなった不動点定理など、それらの若干の数学的内容にも触れながら分析ツールとしての学説史的意義を探った。しかし、限られた紙幅の中での概観であったために、ドブリュー、ゲール・二階堂をはじめとするこの分野での顕著な学術成果について十分な考察を加えることができないまま、筆を置かざるを得ないことに心残りを覚える。別稿に於いては、上記の成果についての追加的考察と、新たに競争的均衡の安定分析に係る学説的成果の概観を試みてみたい。

参考文献

⑴Marie-Esprit-Léon Walras, “Éléments d’Économie Politique Pure, ou Théorie de la richesse sociale”, 1874（久武雅夫訳、『純粋経済学要論－社会的富の理論－』、岩波書店、1983年）
⑵Karl Gustav Cassel, “Theoretische Sozialökonomie”, Leipzig, 1918 (“The Theory of Social Economy”, New York Harcourt, Brace and Co. ltd, 1932 Edition)
⑶Abraham Wald, “Über einige Gleichungssysteme in der mathematischen Ökonomie” Zeitschrift für Nationalökonomie, Vol.7, No.5, 1936, pp.637~667 (“On Some Systems of Equations of Mathematical Economics”, Econometrica, Vol.19, No.4, 1951, pp.368~403)
⑷武藤功、「ウィーンの数理経済学とヒルベルト主義」、慶應義塾経済学会、三田学会雑誌、Vol. 86、No. 1、1993、pp. 70～99
⑸福岡、小山、「カッセル一般均衡体系の再検討」、季刊理論経済学　第９巻第１＆２号、1959年、pp. 44～51
⑹川崎英文、「スペルナーの補題に基づく離散不動点定理」、数理解析研究所講究録、第2126巻、2019年、pp. 122～127
⑺浦井、村上、「経済学的均衡理論が有限性の概念の下で閉じたものとなる可能性について」、

同志社大学商学会、同志社商学　第66巻　第１号、2014年、pp. 133～145
⑻柴田敬、「カツセル氏の「價格形成の機構」の吟味」、京都大学經濟論叢、第30巻６号、1930年、pp916～936
⑼二階堂副包、「現代経済学の数学的方法」、岩波書店、第12刷、1978年
⑽福岡正夫、「一般均衡理論」、創文社、第２刷、昭和55年
⑾久保田肇、「二階堂による無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題と競争均衡の存在証明への適用」、北海道大学、経済学研究　第56巻３号、2007年、pp. 429～457
⑿酒井泰弘、「市場均衡の美学とナイトの異論－競争経済の論理と倫理を考える－」、滋賀大学経済学部リスク研究センター、CRR Discussion Paper Ceries J、2014年
⒀*Yasuhito Tanaka, "Constructive Versions of KKM Lemma and Brouwer's Fixed Point Theorem", International Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 7, Number 1 (2012), pp. 51~56*
⒁櫻田陽一、「ワルラス経済学とその周辺」、福岡女学院大学紀要 Vol. 7、2021年
⒂櫻田陽一、「数理経済学へのご招待」、東洋出版、2022年